مقدمه ویرایش جدید

درسنامه و تست‌های دهم، یازدهم و دوازدهم رو همراه پاسخ‌های تشریحی اون‌ها توی یک کتاب آوردیم!!
برای این‌که حجم کتاب خیلی بالا نره، شروع به دست‌چین کردن تست‌ها و پیرایش درسنامه‌ها کردیم. توی این کار چنان وسواسی به خرج دادیم که مثال‌زدنیه!
از مؤلفای باتجربهٔ خودمون استادان وهاب تقی‌زاده (سرگروه ریاضی دبیرستان البرز)، علیرضا نداف‌زاده (دبیر دبیرستان‌های ممتاز علامه) و شروین سیاح‌نیا خواستیم تا همهٔ درسنامه‌ها و تست‌های کتاب رو دوباره بررسی کنن.
یه تعداد از تست‌های خوب آزمون‌های کانون فرهنگی آموزش (قلم‌چی) رو به کتاب اضافه و تست‌های احیاناً تکراری رو حذف کردیم.
ولی به اینجا بسنده نکردیم!
از یه گروه از بهترین دبیرا خواستیم تا (اون‌ها هم) کتاب رو بررسی و نقد کنن تا حتی ایرادهای کوچیک باقی‌مونده هم برطرف شه. (اسامی این دبیرای مطرح کشور رو برای قدردانی توی انتهای این مقدمه آوردیم.)
کاری کردیم که حداکثر استفادهٔ خرد جمعی رو به کار برده باشیم تا شما تو حداقل زمان به بهترین نتیجه برسین.
تست‌های کنکور امسال رو هم به کتاب اضافه کردیم.

روی بند بند جمله‌ها و تست‌های کتاب وقت گذاشتیم. شاید باورتون نشه ولی برای درک مفاهیم کتاب، کلی جلسه با مؤلفای محترم کتاب درسی داشتیم. خلاصه قدر این کتاب رو بدونین.

حالا بذار بگم ما توی درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم.

هر فصل رو به سه قسمت تقسیم کردیم:

قسمت اول: درسنامه

- توی این قسمت یه درسنامهٔ مفصل آوردیم که تمام مباحث رو مو به مو بهت یاد میده که پر از مثال‌ها و تست‌های آموزشی دوست داشتنیه؛ خلاصه این قسمت گُل کتابه.

توی حل تست‌های آموزشی **یه روش تکنیکی** برات آوردیم که مطمئنم جایی ندیدی!

مُهم یه جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات **مُهر مهم** زدیم تا بیشتر وقت بذاری.

هر جا دیدیم بیشتر بچه‌ها راه‌حل رو اشتباه میرن برات **هشدار** گذاشتیم.

اون جاهایی هم که دیدیم درس سنگین شده و فقط به درد بچه‌های قوی می‌خوره **یک‌گام فراتر** گذاشتیم.

از همه مهم‌تر!!! یه راه‌حل‌هایی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره، اسمش رو گذاشتیم **فرمول ممنوع**، این دیگه آخرشه، بدون این‌که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می‌کنی.

نکته، **دقت کنید** و **تذکر** هم که جای خودشون رو دارن.

قسمت دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- تعدادی تست که توسط باتجربه‌ترین معلم‌ها و مؤلف‌ها دست‌چین شدن که هر کدوم از این مؤلف‌ها، یه وزنه‌ای هستن تو ریاضی!

راستی یه سری از تست‌های کنکور سراسری هم که پای ثابت این بخش هستن رو برات تو این قسمت آوردیم.
تا یادم نرفته بگم، تک‌تک تمرین‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها و ... کتاب رو خوندیم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره!
بعضی تست‌ها رو با علامت مشخص کردیم که سوال‌های سختی هستن.
یه سری هم تست‌هایی اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بزنن و برای همه لازم نیست.
و در آخر، آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجید.

قسمت سوم: پاسخنامهٔ تشریحی

- خیلی از تست‌ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها تا سه روش هم حل کردیم که مطمئنم تا حالا این روش‌ها و مسائل یک‌جا توی هیچ کتاب دیگه‌ای به‌کار نرفتن.

به همهٔ همکارها توصیه کردم تا اون‌جا که میشه فارسی‌نویسی کنن چون همهٔ اساتید ریاضی دوست دارن فقط از علائم ریاضی در حل مسائل استفاده کنن و شاید این‌طوری کسی که داره پاسخ رو می‌خونه چیزی متوجه نشه.
تو پاسخ‌هامون استراتژی حل داریم تا بفهمی مرحله به مرحله چیکار داریم می‌کنیم و در آخر هر چیزی که مهم بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت‌ها اهمیت بدی.

قدردانی

توی تهیهٔ این کتاب خیلی‌ها تأثیرگذار بودن، از جمله:

- آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که واقعاً مثل یک کاپیتان، کشتی بزرگ مهروماه رو هدایت می‌کنن.
- استاد محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف که راهنمایی‌ها و مشاوره‌هاشون بسیار مفید بود.
- آقای احسان لعل مسئول ویراستاری و تیم ویراستاریشون خانم مهرنوش رضوی، و آقایان وحید جعفری، امیرحسین عباسی و مهرشاد حسنی که اگه نبودن چاپ کتاب شاید تا سه سال دیگه هم طول می‌کشید.
- گروه هنری خلاق و دوست‌داشتنی انتشارات مهروماه به مدیریت آقای محسن فرهادی و تیم حرفه‌ایشون خانم الهام اسلامی و آقای تایماز کاویانی که با طراحی‌های زیبا روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.
- از گروه تولید انتشارات مهروماه به مدیریت سرکار خانم مریم تاجداری و مدیریت فنی جناب آقای میلاد صفایی و تیم چیره‌دست صفحه‌آرایی خانم رویا طبسی و رسام‌های محترم سرکار خانم مریم صابری و میترا میرمصطفی کمال تشکر را داریم که در مراحل تولید و ویرایش جدید کتاب با صبر و پشتکار فراوان این امر را میسر نمودند

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرم به آی‌دی زیر ارسال نمایند.

@ashrafii.official

عباس اشرفی

استادان مشاور به سرپرستی آقای میلاد منصوری که از نظرات ارزندهٔ آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم:

- قمر جیر کریمی
- عباس ربیعیان
- فرزین عطاران

فهرست

فصل ۱۱

معادله و تابع درجه دو

این فصل به دو بخش اصلی نمودار تابع درجهٔ دوم و ریشه‌های آن تقسیم می‌شود. یافتن ضابطه از روی نمودار و پارامتریابی به کمک ریشه‌ها نیز از مباحث این فصل هستند.

حل معادلهٔ درجهٔ دوم

۵

به معادله‌ای یک مجهولی که پس از ساده نمودن، بزرگ‌ترین درجهٔ متغیر آن دو است، **معادلهٔ درجهٔ دوم** می‌گوییم.
برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

الف) روش تجزیه

در این روش می‌توانیم از اتحاد مزدوج $(x^۲-a^۲=(x-a)(x+a))$ یا اتحاد جمله مشترک $(x^۲+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b))$ استفاده کنیم.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(x-۱)^۲-۴=۰$ ب) $x^۲-۸x+۷=۰$

پاسخ

الف) $(x-۱)^۲-۴=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ((x-۱)-۲)((x-۱)+۲)=۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$

ب) $x^۲-۸x+۷=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} x^۲+(-۱-۷)x+(-۱)(-۷)=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x-۷=۰ \Rightarrow x=۷ \end{cases}$

استراتژی حل: می‌خواهیم معادلهٔ $۳x^۲-۲x-۸=۰$ را به کمک تجزیه حل کنیم.
با توجه به روش زیر عبارت را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\overset{\times\ \ -۲۴}{۳x^۲-۲x-۸}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۳}(۳x\quad)(۳x\quad)=۰$$

حال به دنبال دو عدد می‌گردیم که جمع آن‌ها برابر -۲ و ضرب آن‌ها برابر $۳\times(-۸)=-۲۴$ باشند:

$$\frac{۱}{۳}(۳x-۶)(۳x+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۶=۰ \Rightarrow x=۲ \\ ۳x+۴=۰ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

برای حل برخی از معادلات درجهٔ دوم ضریب‌دار، می‌توان از قاعدهٔ روبه‌رو استفاده نمود:

$$\overset{\text{ضرب}}{ax^۲+bx+c}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}(ax\quad)(ax\quad)=۰$$

برای تکمیل تجزیه، باید ۲ عدد بیابیم که جمع آن‌ها b و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ac باشد و آن‌ها را درون پرانتزها جای‌گذاری کنیم.

نکته:

۱) در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$، اگر مجموع ضرایب برابر صفر شود $(a+b+c=۰)$، ریشه‌های معادله $x_۱=۱$ و $x_۲=\frac{c}{a}$ هستند.

برای نمونه: ریشه‌های معادلهٔ $۵x^۲-۳x-۲=۰$ برابر ۱ و $\frac{c}{a}=-\frac{۲}{۵}$ هستند.

۲) در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$، اگر $a+c=b$ باشد، ریشه‌های معادله $x_۱=-۱$ و $x_۲=-\frac{c}{a}$ هستند.

برای نمونه: ریشه‌های معادلهٔ $۷x^۲+۴x-۳=۰$ برابر -۱ و $-\frac{c}{a}=-\frac{-۳}{۷}=\frac{۳}{۷}$ هستند.

ب) روش مربع

برای حل معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ابتدا طرفین را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$$

سپس ضریب x را نصف کرده و مربع آن را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰ \xrightarrow{\frac{b}{a}\div ۲=\frac{b}{۲a}} x^۲+\frac{b}{a}x+(+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{c}{a}=(\frac{b}{۲a})^۲$$

سه جملهٔ عبارت بالا را به اتحاد مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{۲a})^۲+\frac{c}{a}=(\frac{b}{۲a})^۲ \Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{c}{a}=(\frac{b}{۲a})^۲ \Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲=(\frac{b}{۲a})^۲-\frac{c}{a}$$

با جذر گرفتن از طرفین معادلهٔ آخر، مقدار x به‌دست می‌آید.

تست: درحل معادلهٔ $۵x^۲-۳x=۱$ به روش مربع کامل، پس از آن‌که ضریب $x^۲$ را به یک تبدیل می‌کنیم، کدام عدد را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم؟

۱) $\frac{۹}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲۵}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ گزینه ۱ طرفین معادله را بر ۵ تقسیم می‌کنیم: $x^2-\frac{3}{5}x=\frac{1}{5}$

ضریب x را نصف می‌کنیم: $-\frac{3}{5}\div 2=-\frac{3}{10}$

عدد حاصل را به توان دو می‌رسانیم: $(-\frac{3}{10})^2=\frac{9}{100}$

باید $\frac{9}{100}$ را به طرفین معادله اضافه کنیم.

پ) روش کلی حل

ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ به‌صورت $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشند که در آن $\Delta=b^2-4ac$ است. در این معادله درصورتی‌که:

مُهِم

(۱) اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.

(۲) اگر $\Delta=0$ باشد، معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.

(۳) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

تست: حدود m کدام باشد تا معادلهٔ $mx^2+(m-1)x+m=0$ حداقل یک ریشه داشته باشد؟

۱) $(-1,\frac{1}{3})$ ۲) $[-1,\frac{1}{3}]$ ۳) $(-\infty,-1]\cup[\frac{1}{3},+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$

پاسخ گزینه ۲ وقتی معادلهٔ درجهٔ دوم ، حداقل یک ریشه دارد، یعنی یا یک و یا دو ریشه دارد. بنابراین دلتای معادله، مثبت یا صفر است.

$$\Delta\ge 0\Rightarrow (m-1)^2-4m\times m\ge 0\Rightarrow m^2-2m+1-4m^2\ge 0\Rightarrow -3m^2-2m+1\ge 0$$

باید ریشه‌های معادلهٔ $-3m^2-2m+1=0$ را بیابیم. در این معادله $a+c=b$ است، پس ریشه‌ها $x_1=-1$ و $x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$ هستند.

اکنون جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3m^2-2m+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

در بازهٔ $[-1,\frac{1}{3}]$ مقدار دلتا مثبت یا صفر است و معادله حداقل یک ریشه دارد.

توجه: در حالت $m=0$، معادله به‌صورت $-x=0$ درمی‌آید و معادلهٔ درجهٔ دوم نیست ولی یک ریشه دارد.

نکته: عبارت درجهٔ دومی قابل تبدیل به مربع کامل است که دلتای آن برابر صفر باشد.

تست: چند واحد به عبارت $25x^2-x-1$ اضافه کنیم تا تبدیل به مربع کامل شود؟

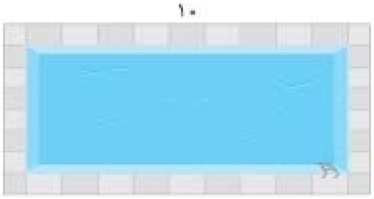
۱) $\frac{1}{100}$ ۲) $\frac{101}{100}$ ۳) $\frac{100}{101}$ ۴) $\frac{11}{10}$

پاسخ گزینه ۲ فرض می‌کنیم باید k واحد به $25x^2-x-1$ اضافه کنیم تا مربع کامل شود، پس عبارت $25x^2-x-1+k$ مربع کامل است و اگر دلتای آن را محاسبه کنیم باید برابر صفر شود.

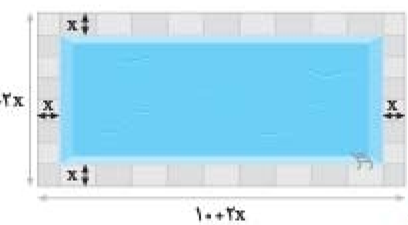
$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(25)(-1+k)=0\Rightarrow 1+100-100k=0\Rightarrow k=\frac{101}{100}$$

کاربرد معادلهٔ درجهٔ دوم در حل مسائل

برای درک این مفهوم به مثال زیر توجه کنید:



مثال: یک استخر مستطیل شکل به طول ۱۰ متر و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید. (تمرین کتاب درسی)



پاسخ فرض می‌کنیم پهنای آبراه x باشد. مساحت مستطیل خارجی برابر $(10+2x)(3+2x)$ است. مساحت آبراه با کم کردن مساحت استخر از مساحت مستطیل خارجی، به‌دست می‌آید.

$$\text{مساحت آبراه}=(10+2x)(3+2x)-3\times 10$$

$$14=(30+26x+4x^2)-30$$

با حل معادلهٔ فوق، پهنای آبراه پیدا می‌شود:

$$26x+4x^2=14\xrightarrow{\div 2}2x^2+13x=7\Rightarrow 2x^2+13x-7=0\Rightarrow \frac{1}{2}(2x+14)(2x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\\ x_2=-7\ \text{غیرقابل‌قبول}\end{cases}$$

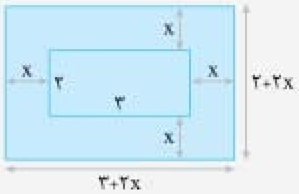
بنابراین پهنای آبراه برابر ۰/۵ متر است.

تست: می‌خواهیم بر روی یک میز ۳×۲ متری، یک رومیزی مستطیل شکل به مساحت ۲۰ متر مربع، پهن کنیم، به طوری‌که از هر چهار طرف به یک اندازه آویزان شده باشد. رومیزی از هر طرف چقدر آویزان شده است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینه۳ اگر طول مقداری از رومیزی که آویزان است را x در نظر بگیریم، با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:



$$(۳+۲x)(۲+۲x) = \text{مساحت رومیزی}$$
$$۲۰ = ۶ + ۱۰x + ۴x^۲$$

با حل این معادله مقدار x را می‌یابیم: $۴x^۲ + ۱۰x - ۱۴ = ۰$

در این معادلهٔ درجهٔ دوم مقدار $a+b+c=۰$ است، پس ریشه‌ها $x_۱ = ۱ , x_۲ = \frac{c}{a} = -\frac{۷}{۲}$ می‌باشند. با توجه به این‌که طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها گزینهٔ قابل قبول $x=۱$ است.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را به کمک روابط زیر پیدا کرد.

مُهِم

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

تست: m کدام باشد تا ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + (m-۳)x + m^۲ - ۳ = ۰$ معکوس هم باشند؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ± ۲ ۴) هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

پاسخ گزینهٔ ۱ اگر ریشه‌های معادله معکوس هم باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱ می‌باشد، بنابراین $P = \frac{c}{a} = ۱$ است.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^۲ - ۳}{۱} = ۱ \Rightarrow m^۲ = ۴ \Rightarrow m = \pm ۲$$

اما دقت کن! گزینهٔ «۳» صحیح نیست، زیرا به ازای دو مقدار $m = \pm ۲$ باید معادله دارای دو ریشه باشد، یعنی دلتای معادله باید مثبت باشد.

$$x^۲ + (m-۳)x + m^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \ : x^۲ - x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۱)^۲ - ۴ = -۳ < ۰ \\ m = -۲ : x^۲ - ۵x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۵)^۲ - ۴ = ۲۱ > ۰ \end{cases}$$

درحالتی که $m = ۲$ باشد، معادله ریشه ندارد و این جواب قابل قبول نیست.

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. $\left(|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)$

تست: به ازای دو مقدار m ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (۲m+۱)x + ۶m = ۰$ دو عدد متوالی‌اند. مجموع این دو مقدار کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

پاسخ گزینه۲ ریشه‌های معادله، دو عدد متوالی‌اند، بنابراین تفاضل آن‌ها برابر ۱ است.

$$|\alpha - \beta| = ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{(-(۲m+۱))^۲ - ۴(۶m)}}{۱} = ۱ \Rightarrow (۲m+۱)^۲ - ۲۴m = ۱$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ + ۴m + ۱ - ۲۴m = ۱ \Rightarrow ۴m^۲ - ۲۰m = ۰ \Rightarrow ۴m(m-۵) = ۰ \Rightarrow m = ۰ , m = ۵$$

به‌ازای این دو مقدار معادله دارای دو ریشهٔ صحیح متوالی می‌باشد و مجموع این دو مقدار برابر ۵ است.

محاسبهٔ روابط متقارن بین ریشه‌ها

به روابطی از ریشه‌ها که با جابه‌جا کردن ریشه‌ها مقدار آن‌ها تغییر نمی‌کند رابطه‌های **متقارن** می‌گویند، برای نمونه: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}, \alpha^۳+\beta^۳, \alpha^۲+\beta^۲, \frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$

برای محاسبهٔ این مقادیر، معمولاً از اتحادها یا مخرج مشترک استفاده می‌کنیم.

برای نمونه: برای محاسبهٔ مقدار $\alpha^۲+\beta^۲$ آن را به‌شکل $(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta$ درمی‌آوریم. با قراردادن S به‌جای $\alpha+\beta$ و P به‌جای $\alpha\beta$ حاصل عبارت به‌صورت $S^۲-۲P$ درمی‌آید. $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۸=۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\beta}{\alpha+۱}+\frac{\alpha}{\beta+۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۸}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۵}{۱۸}$ ۴) $-\frac{۳۵}{۱۸}$

پاسخ (گزینه ۴) این رابطه، یک رابطهٔ متقارن است، چون با تغییر α به β و بالعکس، حاصل عبارت تغییر نمی‌کند.
به زبان خودمانی هر بلایی سر α آمده بر سر β هم آمده!

برای شروع، مخرج مشترک می‌گیریم:
$$\frac{\alpha}{\beta+۱}+\frac{\beta}{\alpha+۱}=\frac{\alpha^۲+\alpha+\beta^۲+\beta}{(\beta+۱)(\alpha+۱)}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}$$

حالا به‌جای $\alpha^۲+\beta^۲$ عبارت $(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta$ را جای‌گذاری می‌کنیم:
$$\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}=\frac{S^۲-۲P+S}{P+S+۱}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۸}{۲}=-۴\ ,\ S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{S^۲-۲P+S}{P+S+۱}=\frac{(-\frac{۳}{۲})^۲-۲(-۴)+(-\frac{۳}{۲})}{-۴+(-\frac{۳}{۲})+۱}=\frac{\frac{۳۵}{۴}}{-\frac{۹}{۲}}=-\frac{۳۵}{۱۸}$$

نکته: برای محاسبهٔ سریع‌تر، بهتر است برخی از روابط را به‌خاطر بسپارید.

۱) $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$
۲) $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$
۳) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{S}{P}$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۷x+۴=۰$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

پاسخ (گزینه ۳) اگر فرض کنیم حاصل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ برابر عددی مانند A باشد، طرفین را به توان دو می‌رسانیم:
$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=A\Rightarrow(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲=A^۲\Rightarrow\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=A^۲\xrightarrow{A\geq ۰}\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=A\Rightarrow\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=A$$

در این معادله $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-۷)}{۱}=۷$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۱}=۴$ هستند. $A=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=\sqrt{۷+۲\sqrt{۴}}=\sqrt{۷+۴}=\sqrt{۱۱}$

محاسبهٔ روابط نامتقارن بین ریشه

رابطه‌ای که متقارن نباشد، **نامتقارن** نامیده می‌شود. برای محاسبهٔ این روابط، از جای‌گذاری ریشه‌ها در معادله کمک می‌گیریم.

تست: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۶x-۳=۰$ باشند، حاصل $A=\alpha\beta^۳-۶\alpha\beta^۲$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -۹ ۳) ۱۸ ۴) -۱۸

پاسخ (گزینه ۲) در رابطهٔ داده شده از $\alpha\beta$ فاکتور می‌گیریم: $A=\alpha\beta^۳-۶\alpha\beta^۲=\alpha\beta(\beta^۲-۶\beta)$

با جای‌گذاری β به‌عنوان ریشه در معادلهٔ $x^۲-۶x-۳=۰$ به‌عبارت $\beta^۲-۶\beta-۳=۰$ می‌رسیم: $\beta^۲-۶\beta-۳=۰\Rightarrow\beta^۲-۶\beta=۳$

اکنون به محاسبهٔ A می‌پردازیم: $A=\alpha\beta(\beta^۲-۶\beta)=\alpha\beta(۳)=۳\alpha\beta=۳P$

در این معادله $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۳}{۱}=-۳$ است، پس: $A=۳P=۳(-۳)=-۹$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۲x-۴=۰$ باشند، حاصل $(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -۱۶ ۳) ۴۸ ۴) -۴۸

پاسخ (گزینه ۳) α را در معادلهٔ $x^۲-۲x-۴=۰$ جای‌گذاری می‌کنیم: $\alpha^۲-۲\alpha-۴=۰\Rightarrow\alpha^۲-۴=۲\alpha$

حال به محاسبهٔ عبارت $(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲$ می‌پردازیم: $(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲=(۲\alpha)^۲+۴\beta^۲=۴\alpha^۲+۴\beta^۲=۴(\alpha^۲+\beta^۲)$

در بخش رابطه‌های متقارن ثابت کردیم که $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$ است، پس: $۴(\alpha^۲+\beta^۲)=۴(S^۲-۲P)$

در این معادله $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۲}{۱}=۲$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{-۴}{۱}=-۴$ هستند. $۴(۲^۲-۲(-۴))=۴(۴+۸)=۴۸$

بحث راجع به ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

با استفاده از Δ ، S و P می‌توان (بدون حل معادله) در مورد وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ بحث نمود:

الف) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

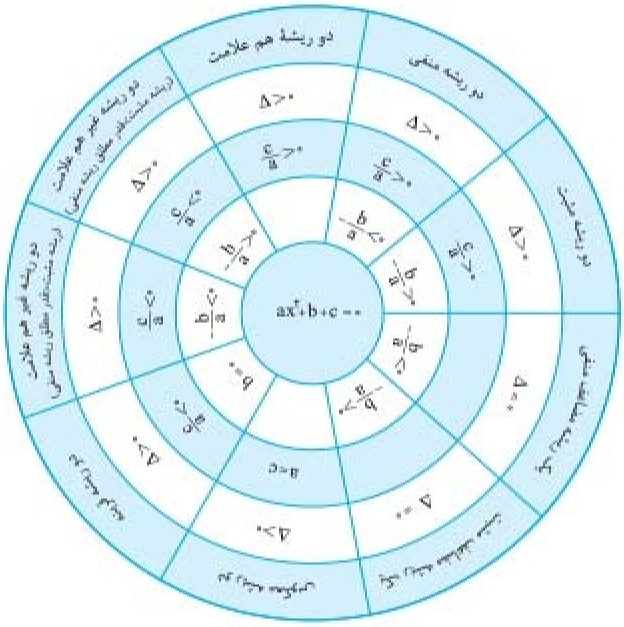
ب) اگر $\Delta=0$ باشد، معادله یک ریشهٔ مضاعف برابر $x=-\frac{b}{2a}$ و هم‌علامت با S دارد.

پ) اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دو ریشهٔ متمایز دارد. درصورتی‌که $P<0$ باشد، دو ریشه مختلف‌العلامت هستند و اگر $P>0$ باشد، دو ریشه هم‌علامت بوده و در این حالت، ریشه‌ها، هم‌علامت با S هستند.

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow\begin{cases}\Delta<0\Rightarrow\text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.}\\ \Delta=0\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\ \text{معادله ریشهٔ مضاعفی هم‌علامت با S دارد.}\\ \Delta>0\Rightarrow\begin{cases}P<0\Rightarrow\text{معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.}\\ P>0\Rightarrow\begin{cases}S>0\Rightarrow\text{معادله دو ریشهٔ مثبت دارد.}\\ S<0\Rightarrow\text{معادله دو ریشهٔ منفی دارد.}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

مُهم

گردونهٔ علامت:



تست: معادلهٔ $mx^2+(2-2m)x+2m=0$ به ازای $m\in(a,b)$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است. حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\sqrt{2}+1$ ۳) $2-\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}-2$

پاسخ گزینه ۲ در مرحلهٔ اول دلتای معادله باید مثبت باشد، پس:

$$\Delta>0\Rightarrow(2-2m)^2-4(m)(2m)>0\Rightarrow 4+4m^2-8m-8m^2>0\Rightarrow-4m^2-8m+4>0$$

طرفین را بر -4 تقسیم می‌کنیم تا ضریب m^2 مثبت شود: $m^2+2m-1<0$

برای حل این نامعادله باید ریشه‌های معادلهٔ $m^2+2m-1=0$ را بیابیم: $m^2+2m-1=0\Rightarrow m_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$

به کمک جدول تعیین علامت حدود m را پیدا می‌کنیم:

m	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
m^2+2m-1		+	0	−	0	+	

$\Rightarrow -1-\sqrt{2}<m<-1+\sqrt{2}$ ①

در مرحلهٔ دوم حاصل‌ضرب ریشه‌ها باید مثبت باشد. $P>0\Rightarrow\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{2m}{m}>0\Rightarrow m\in\mathbb{R}-\{0\}$ ②

در مرحلهٔ سوم باید مجموع ریشه‌ها مثبت باشد.

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{2-2m}{m}>0\Rightarrow\frac{2m-2}{m}>0\Rightarrow$$

m	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$2m-2$	$-$		$-$	0	$+$
m	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2m-2}{m}$	$+$	ت ن	$-$	0	$+$

$\Rightarrow(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ ۳

پاسخ نهایی تست اشتراک مجموعه‌های ۱ ، ۲ و ۳ است.

$$\xrightarrow{①\cap②\cap③}-1-\sqrt{2}<m<0\Rightarrow m\in(-1-\sqrt{2},0)\Rightarrow\begin{cases}a=-1-\sqrt{2}\\ b=0\end{cases}\Rightarrow b-a=0-(-1-\sqrt{2})=\sqrt{2}+1$$

ساختن معادلهٔ درجهٔ دوم

معادلهٔ درجهٔ دومی که α و β ریشه‌های آن باشند، به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ نوشته می‌شود که در آن $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ هستند.

مثال: معادلهٔ درجهٔ دومی بسازید که ریشه‌های آن $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ باشند. *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ ابتدا به محاسبهٔ مجموع و حاصل‌ضرب این دو ریشه می‌پردازیم:

$$\begin{cases}S=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4\\ P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1\end{cases}$$

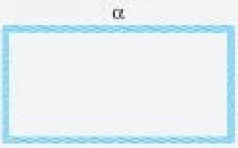
حال مقادیر S و P را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-4x+1=0$$

تست: اگر بخواهیم زمینی مستطیل شکل به مساحت ۴۸ متر مربع را با طنابی به طول ۳۲ متر محصور کنیم، حاصل تفاضل عرض از طول مستطیل کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ گزینه ۱ اگر طول مستطیل را α متر و عرض آن را β متر در نظر بگیریم، محیط مستطیل ۳۲ متر و مساحت آن ۴۸ متر مربع است.



$$\beta\begin{cases}2\alpha+2\beta=32\\ \alpha\beta=48\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=16\\ \alpha\beta=48\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S=16\\ P=48\end{cases}$$

حال معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن α و β است را پیدا می‌کنیم:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-16x+48=0$$

برای محاسبهٔ تفاضل عرض از طول مستطیل ($|\alpha-\beta|$) می‌توان از رابطهٔ $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ استفاده نمود:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|1|}=\sqrt{(-16)^2-4(1)(48)}=\sqrt{256-192}=\sqrt{64}=8$$

البته برای محاسبهٔ تفاضل دو ریشه در اینجا چون حل معادلهٔ $x^2-16x+48=0$ کار سختی نیست، می‌توانیم خود ریشه‌ها را نیز محاسبه کنیم:

$$x^2-16x+48=0\Rightarrow(x-12)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=12=\alpha\\ x=4=\beta\end{cases}\Rightarrow\alpha-\beta=12-4=8$$

معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌های آن $x_1=2-\sqrt{n}$ باشد، کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) $x^2+4x+4+n=0$ ۲) $x^2-4x+4+n=0$ ۳) $x^2+4x_1+4-n=0$ ۴) $x^2-4x+4-n=0$

پاسخ گزینه ۴ به توان رساندن طرفین معادلهٔ $x_1=2-\sqrt{n}$ و از بین بردن رادیکال، معادلهٔ درجهٔ دوم ظاهر می‌شود.

$$x_1=2-\sqrt{n}\Rightarrow x_1-2=-\sqrt{n}\Rightarrow(x_1-2)^2=n\Rightarrow x_1^2-4x+4-n=0$$

بنابراین معادله می‌تواند به‌صورت $x^2-4x+4-n=0$ باشد.

ساختن معادلهٔ درجهٔ دوم بر اساس ریشه‌های یک معادلهٔ دیگر

این بخش را به کمک یک مثال پیش می‌بریم:

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $2\alpha+1$ و $2\beta+1$ باشند.

پاسخ می‌دانیم مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ به‌ترتیب $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{1}=3$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-5}{1}=-5$ هستند.

حال مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید، یعنی $۲\alpha+۱$ و $۲\beta+۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S'=S_{\text{جدید}}=(۲\alpha+۱)+(۲\beta+۱)=۲(\alpha+\beta)+۲=۲(۳)+۲=۸$$

$$P'=P_{\text{جدید}}=(۲\alpha+۱)(۲\beta+۱)=۴\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۱=۴(-۵)+۲(۳)+۱=-۲۰+۶+۱=-۱۳$$

معادلهٔ درجهٔ دومی را می‌یابیم که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن به‌ترتیب ۸ و ۱۳− هستند. $X^۲-S'X+P'=۰\Rightarrow X^۲-۸X-۱۳=۰$

تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۴=۰$ یک واحد بزرگ‌تر است؟

۱) $۷x^۲-۴x-۱=۰$ ۲) $۴x^۲-۷x+۱=۰$ ۳) $۲x^۲-۷x+۱=۰$ ۴) $۷x^۲-x-۲=۰$

پاسخ (گزینه ۲) روش اول اگر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۴=۰$ را α و β در نظر بگیریم، ریشه‌های معادلهٔ جدید $\frac{۱}{\alpha}+۱$ و $\frac{۱}{\beta}+۱$ می‌باشند.

به محاسبهٔ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید می‌پردازیم:

$$\begin{cases} S'=(\frac{۱}{\alpha}+۱)+(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{-\frac{b}{c}}{\frac{c}{a}}+۲=\frac{\frac{۱}{۲}}{-۲}+۲=\frac{۷}{۴} \\ P'=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱+\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱+(-\frac{b}{a})}{\frac{c}{a}}+۱=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{-۲}+۱=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

معادلهٔ جدید را به کمک فرمول $x^۲-S'x+P'=۰$ می‌یابیم: $x^۲-S'x+P'=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۷}{۴}x+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۷x+۱=۰$

روش دوم اگر α ریشهٔ معادلهٔ $۲x^۲-x-۴=۰$ باشد $t=\frac{۱}{\alpha}+۱$ ریشهٔ معادلهٔ جدید خواهد بود، حال مقدار α را برحسب t به‌دست می‌آوریم:

$$t-۱=\frac{۱}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{t-۱}$$

چون ریشهٔ هر معادله در خود آن معادله صدق می‌کند، پس:

$$۲(\frac{۱}{t-۱})^۲-\frac{۱}{t-۱}-۴=۰\xrightarrow{\times(t-۱)^۲}۲-(t-۱)-۴(t-۱)^۲=۰\Rightarrow ۴t^۲-۷t+۱=۰\xrightarrow{\text{معادلهٔ نهایی}}۴x^۲-۷x+۱=۰$$

پارامتریابی به کمک رابطهٔ بین ریشه‌ها

هرگاه رابطه‌ای بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داشته باشیم، با تشکیل مقادیر S و P و جای‌گذاری رابطهٔ داده شده در آن‌ها، پارامتر خواسته‌شده را می‌یابیم.

تست: اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+(۲m+۱)x+۲m=۰$ دو برابر دیگری باشد، مجموع مربعات ریشه‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ (گزینه ۱) ریشه‌های این معادله α و ۲α می‌باشند، پس می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\begin{cases} S=\alpha+۲\alpha=-\frac{b}{a} \\ P=\alpha.۲\alpha=\frac{c}{a} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۳\alpha=-\frac{۲m+۱}{۱} \\ ۲\alpha^۲=۲m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha=-\frac{۲m+۱}{۳} \\ \alpha^۲=m \end{cases}$$

به جای α در رابطهٔ $\alpha^۲=m$ مقدار $-\frac{۲m+۱}{۳}$ را قرار می‌دهیم:

$$\alpha^۲=m\Rightarrow(-\frac{۲m+۱}{۳})^۲=m\Rightarrow\frac{۴m^۲+۴m+۱}{۹}=m\Rightarrow ۴m^۲-۵m+۱=۰\Rightarrow\begin{cases} m=۱ \\ m=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

به ازای دو مقدار مختلف m، معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$x^۲+(۲m+۱)x+۲m=۰\Rightarrow\begin{cases} m=۱\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۰\Rightarrow\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}=S^۲-۲P=۹-۴=۵ \\ m=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x^۲+\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}=S^۲-۲P=\frac{۹}{۴}-۱=\frac{۵}{۴} \end{cases}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها ۵ یا $\frac{۵}{۴}$ می‌تواند باشد.

نکته: اگر در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ یکی از ریشه‌ها، k برابر دیگری باشد، آن‌گاه داریم: $\frac{(k+۱)^۲}{k}=\frac{b^۲}{ac}$

اگر بخواهیم همین تست را با استفاده از نکتهٔ گفته شده حل کنیم با در نظر گرفتن $k=۲$ داریم:

$$\frac{(k+۱)^۲}{k}=\frac{b^۲}{ac}\Rightarrow\frac{(۲+۱)^۲}{۲}=\frac{(۲m+۱)^۲}{۱\times۲m}\Rightarrow ۹m=۴m^۲+۴m+۱$$

درنهایت به معادلهٔ $۴m^۲-۵m+۱=۰$ می‌رسیم و دو مقدار $m=۱$ و $m=\frac{۱}{۴}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ مجموع مربعات ریشه‌ها باید مشابه حل قبلی مراحل را ادامه دهیم.

معادلهٔ دو مجذوری

برخی از معادلات را با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان به معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل نمود.

برای نمونه: معادلهٔ $x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ را با تغییر متغیر $x^2 = t$ می‌توان به معادلهٔ درجهٔ دوم $t^2 - 5t + 2 = 0$ تبدیل نمود.

تست: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-1)^2 - 9x^2 = -17$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}+2$ ۴) صفر

پاسخ (گزینه ۴) با تغییر متغیر $x^2 - 1 = t$ معادله را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 - 1 = t \Rightarrow x^2 = t+1 \Rightarrow t^2 - 9(t+1) = -17 \Rightarrow t^2 - 9t - 9 = -17 \Rightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = 8 \Rightarrow x^2 = 8+1 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow$$

معادله دارای ۴ ریشه است که دو به دو قرینه‌اند و مجموع همهٔ آن‌ها برابر صفر است.

بحث راجع به ریشه‌های معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (با فرض $a,b,c \neq 0$)

قرض کنید می‌خواهیم تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^4 - 7x^2 - 2 = 0$ را بدون حل آن بدانیم.
با تغییر متغیر $x^2 = t$ معادله به‌شکل $t^2 - 7t - 2 = 0$ درمی‌آید.
دلتای این معادله مثبت است، پس این معادله دو ریشهٔ t_1 و t_2 دارد.
مجموع ریشه‌های معادله برابر $S = -\frac{b}{a} = 7$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P = \frac{c}{a} = -2$ است.
بنابراین مجموع t_1 و t_2 مثبت و ضرب آن‌ها منفی است، پس یکی از اعداد t_1 و t_2 مثبت و دیگری منفی است.
اما دقت کنیدکه $x^2 = t$ است و t_1 و t_2 نمی‌توانند منفی باشند و تنها یک ریشه برای معادلهٔ $t^2 - 7t + 2 = 0$ قابل قبول است.
درنهایت به‌ازای یک مقدار t، دو مقدار برای x به‌دست می‌آید: $x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$
این معادله دو ریشه دارد.
برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به‌صورت نمودار مقابل بیان می‌کنیم.

مُهِم

$ax^4 + bx^2 + c = 0$
- $\Delta < 0$ ← معادله ریشه ندارد.
- $\Delta = 0$
  - $-\frac{b}{2a} > 0$ ← معادله دو ریشهٔ قرینه دارد.
  - $-\frac{b}{2a} < 0$ ← معادله ریشه ندارد.
- $\Delta > 0$
  - $P < 0$ ← معادله دو ریشهٔ قرینه دارد.
  - $P > 0$
    - $S > 0$ ← معادله چهار ریشه دارد.
    - $S < 0$ ← معادله ریشه ندارد.

نکته: در حالت $P < 0$ نیازی به بررسی دلتا وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c **مختلف‌العلامت** باشند، دلتا لزوماً **مثبت** می‌شود.

تست: معادلهٔ $x^4 - 4x^2 + 2 - a = 0$ چهار ریشهٔ متمایز دارد. حدود a کدام است؟

۱) $a > -2$ ۲) $-8 < a < -2$ ۳) $a < 2$ ۴) $-2 < a < 2$

پاسخ (گزینه ۴) مطابق آن‌چه در نمودار قبل گفته شد، زمانی معادله ۴ ریشه دارد که:

(۱) $\Delta > 0 \Rightarrow 4^2 - 4(1)(2-a) > 0 \Rightarrow 16 - 8 + 4a > 0 \Rightarrow 8 + 4a > 0 \Rightarrow a > -2$

(۲) $P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2-a}{1} = 2 - a > 0 \Rightarrow a < 2$

(۳) $S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 > 0$ بدیهی

اشتراک مجموعه‌های فوق $-2 < a < 2$ می‌شود.

بحث راجع به ریشه‌های معادلهٔ $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ (با فرض $a,b,c \neq 0$)

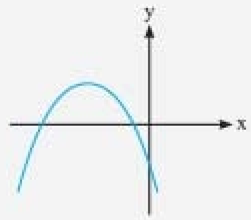
مُهِم

$ax + b\sqrt{x} + c = 0$
- $\Delta < 0$ ← معادله ریشه ندارد.
- $\Delta = 0$
  - $-\frac{b}{2a} > 0$ ← معادله یک ریشه دارد.
  - $-\frac{b}{2a} < 0$ ← معادله ریشه ندارد.
- $\Delta > 0$
  - $P < 0$ ← معادله یک ریشه دارد.
  - $P > 0$
    - $S > 0$ ← معادله دو ریشه دارد.
    - $S < 0$ ← معادله ریشه ندارد.

تست: اگر نمودار تابع $f(x)=mx^۲-۴x+(m+۱)$ فقط از ربع اول عبور نکند، حدود m کدام است؟

۱) $\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}<m\leq -۱$
۲) $\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}<m<\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$
۳) $-۱\leq m<\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$
۴) $\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}<m<۱$

پاسخ گزینهٔ ۱ نمودار تابع $f(x)$ می‌تواند به شکل مقابل باشد.



در این نمودار:
۱ $a<۰$ است، پس $m<۰$ است.
۲ $c\leq ۰$ است، پس $m+۱\leq ۰$ ، درنتیجه $m\leq -۱$ است.
۳ شیب مماس در نقطهٔ برخورد با محور عرض‌ها منفی است، پس $b<۰$ است. در این سؤال $b=-۴$ است و شرط برقرار است.
۴ منحنی دو بار محور طول‌ها را قطع کرده است، پس $\Delta>۰$ است:

$$\Delta>۰\Rightarrow(-۴)^۲-۴m(m+۱)>۰\Rightarrow ۱۶-۴m^۲-۴m>۰\Rightarrow ۴m^۲+۴m-۱۶<۰\xrightarrow{\div ۴}m^۲+m-۴<۰$$
$$\Rightarrow m_{۱,۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۲}\Rightarrow\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}<m<\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$$

پاسخ سؤال، اشتراک همهٔ جواب‌های به‌دست آمده است، یعنی:

$$\{m<۰\}\cap\{m\leq -۱\}\cap\{\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}<m<\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}\}=\frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}<m\leq -۱$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

معادلهٔ درجهٔ دوم و مسائل کاربردی

۶۶۱. مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۶x+۴=۰$، کدام است؟
۱) $\{۳+\sqrt{۵}\ ,\ ۳-\sqrt{۵}\}$ ۲) $\{۲+\sqrt{۵}\ ,\ ۲-\sqrt{۵}\}$ ۳) $\{۲+\sqrt{۳},۲-\sqrt{۳}\}$ ۴) $\{۴+\sqrt{۳}\ ,\ ۴-\sqrt{۳}\}$

۶۶۲. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(\sqrt{۲}-۱)x^۲-۲x+\sqrt{۲}+۱=۰$، کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)
۱) $-(۳-۲\sqrt{۲})$ ۲) $-(۳+۲\sqrt{۲})$ ۳) $-(۵-۲\sqrt{۲})$ ۴) $-(۵+۲\sqrt{۲})$

۶۶۳. اختلاف دو ریشهٔ معادلهٔ $x^۲-(\log_{۱۵}۵)x-\log_{۱۵}۳=۰$، چقدر است؟
۱) $\log_{۱۵}۳$ ۲) $\log_{۱۵}۵$ ۳) ۱ ۴) $\log_{۱۵}۴۵$

۶۶۴. اگر $x=\frac{۱}{۲}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۳+x^۲-۷x+m=۰$ باشد، بزرگ‌ترین ریشهٔ معادله کدام است؟
۱) $\frac{-۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۲) $\frac{-۱-\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$

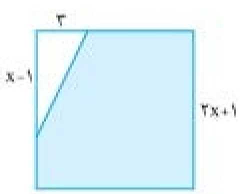
۶۶۵. اگر معادلهٔ $(x+۲)^۲=k-۲$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، جواب‌های معادلهٔ $(x-۱)^۲=k+۱$ کدام است؟
۱) ۳ و ۱− ۲) ۳− و ۱ ۳) ۲− و ۱ ۴) ۲ و ۲−

۶۶۶. اگر $x_۰$ ریشهٔ مثبت و مضاعف معادلهٔ $(k+۲)x^۲-۲kx+۱=۰$ باشد، مقدار $kx_۰$ کدام است؟
۱) ۱− ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۶۷. نمودارهای $y=x^۲$ و $y=۲x+۳$ یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کنند. طول پاره‌خط AB کدام است؟
۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۵\sqrt{۴}$ ۳) $۳\sqrt{۴}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۶۶۸. حاصل‌ضرب دو عدد فرد مثبت و متوالی برابر ۱۹۵ می‌باشد. مجموع آن‌ها کدام است؟
۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۶۶۹. اگر مساحت قسمت رنگی از مربع روبه‌رو برابر ۲۱۶ سانتی‌متر مربع باشد، x چندسانتی‌متر است؟
۱) ۱۰
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۷



۶۷۰. اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌صورت $x+۱$، $x+۲$ و $x+۳$ می‌باشد. تانژانت کوچک‌ترین زاویهٔ آن کدام است؟
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۶۷۱. در مسابقات جام جهانی فوتبال در سال ۲۰۱۴ در کل ۲۱۰ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های حاضر در جام فقط یک بازی انجام داده باشد، تعداد کل تیم‌های راه‌یافته به جام جهانی کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

مجموع و حاصل‌ضرب دو ریشه

۶۷۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ باشند، حاصل $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ کدام است؟

۱) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{11\sqrt{2}}{2}$

۶۷۳. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-6x+1=0$ باشند، حاصل $\left|\alpha\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\alpha}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}\sqrt{6+2\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{1}{3}\sqrt{6-2\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{1}{2}\sqrt{6-2\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{3}}$

۶۷۴. اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-5x-2=0$ باشند، حاصل $\frac{\beta-1}{\beta+1}+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) 1 ۳) -1 ۴) $\frac{2}{3}$

۶۷۵. اختلاف واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی مثبت ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(4m-1)x+4m^2=0$ برابر ۱ واحد است. چند مقدار برای m ممکن است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۷۶. ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-3x+1=0$ برابر x_1 و x_2 هستند. حاصل $\sqrt{x_1^2(3x_2-1)}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۶۷۷. اگر α یک جواب معادلهٔ $x^2+4x-3=0$ باشد، حاصل $P=(\alpha+1)(\alpha+4)(\alpha-2)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) -18 ۲) -15 ۳) -16 ۴) -12

۶۷۸. به‌ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ می‌باشد؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و -1

رابطهٔ بین ریشه‌ها

۶۷۹. معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن $3-\sqrt{a+1}$ و $\sqrt{a+1}+3$ باشد، کدام است؟ $(a>-1)$

۱) $x^2+(6-a)x+8=0$ ۲) $x^2-6x+8-a=0$

۳) $x^2+(a-8)x+6=0$ ۴) $x^2+8x+a-6=0$

۶۸۰. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x=1$ باشند، به‌ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2+kx-1=0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۹

۶۸۱. اگر در معادلهٔ $2x^2+mx+6=0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد از جواب دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

۱) ± 6 ۲) ± 4 ۳) ± 12 ۴) ± 8

۶۸۲. در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(m+1)x+m-2=0$ یکی از ریشه‌ها از ۲ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر است. m کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۶۸۳. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کمتر است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

۶۸۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=2$ باشند، به‌ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $4x^2-kx+25$ به‌صورت $\{\frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\alpha^2}\}$ است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۶۸۵. اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{1+\frac{1}{\beta}, 1+\frac{1}{\alpha}\}$ است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۶۸۶. به‌ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ می‌باشد؟ (ریاضی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۸۷. به‌ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-x-2=0$ می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

برای محاسبهٔ $g^{-1}(30)$ هم، مقدار $g(x)$ را برابر ۳۰ قرار می‌دهیم.

$x^3+x=30 \Rightarrow x=3$

۶۴۵. گزینه ۱ با توجه به زوج مرتب‌های واقع در f و g می‌توان نوشت:

$(4,5)\in f \Rightarrow f(4)=5$

$(4,1)\in gof \Rightarrow g(f(4))=1 \xrightarrow{f(4)=5} g(5)=1$

$\xrightarrow{(b,1)\in g} b=5$

$(4,2)\in fog \Rightarrow f(g(4))=2 \xrightarrow{(3,2)\in f} g(4)=3$

$\xrightarrow{(a,3)\in g} a=4$

درنتیجه: $(a,b)=(4,5)$

۶۴۶. گزینه ۲ با توجه به توابع داده‌شده:

$$\begin{cases} f(g(x))=\dfrac{x}{x-3} \\ g(x)=2x-1\end{cases} \Rightarrow f(2x-1)=\frac{x}{x-3} \quad (1)$$

حال برای محاسبهٔ $f(3)$ کافی است $(2x-1)$ را برابر ۳ قرار داده، سپس x را یافته و در عبارت (1) قرار دهیم:

$2x-1=3 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

$$\xrightarrow{(1)} f(2x-1)=\frac{x}{x-3} \xrightarrow{x=2} f(3)=\frac{2}{2-3}=-2$$

۶۴۷. گزینه ۲ می‌دانیم $f(-\frac{1}{4})=f(6)=0$ است. حال برای این که fog محور xها را قطع کند باید $f(g(x))=0$ باشد. با توجه به این که $f(6)=0$ و $f(-\frac{1}{4})=0$ است، پس باید $g(x)=6$ و $g(x)=-\frac{1}{4}$ باشد. برای حل این معادلات می‌توانیم از یکی از روش‌های زیر استفاده کنیم.

حالت اول $g(x)=x-\sqrt{x}=6 \xrightarrow[x=A^2]{\sqrt{x}=A} A^2-A=6$

$\Rightarrow A^2-A-6=0 \Rightarrow (A-3)(A+2)=0$

$$\Rightarrow A=3\,,\,A=-2 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9\\ \sqrt{x}=-2 \quad \times\end{cases}$$

حالت دوم $g(x)=x-\sqrt{x}=-\frac{1}{4} \xrightarrow[x=A^2]{\sqrt{x}=A} A^2-A+\frac{1}{4}=0$

$\Rightarrow (A-\frac{1}{2})^2=0 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \Rightarrow A=\sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

۶۴۸. گزینه ۲ تعریف دامنهٔ ترکیب توابع را پیاده می‌کنیم:

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

پس ابتدا با توجه به توابع f و g، دامنهٔ آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$D_g: x-x^2\ge 0 \Rightarrow x(1-x)\ge 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_g=[0,1]$

$D_f: 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{\pm 1\} \,\middle|\, \frac{1+x^2}{1-x^2}\in[0,1]\right\}$$

عبارت $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ متعلق به بازهٔ $[0,1]$ است، پس نامعادلهٔ مضاعف $0\le\frac{1+x^2}{1-x^2}\le 1$ را حل می‌کنیم:

$\frac{1+x^2}{1-x^2}\ge 0 \xrightarrow{1+x^2>0} 1-x^2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow -1<x<1 \quad (1)$

$\frac{1+x^2}{1-x^2}\le 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2}-1\le 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2}\le 0$

$\Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2}\le 0 \xrightarrow{2x^2\ge 0} 1-x^2<0 \Rightarrow x^2>1$

$\Rightarrow x>1$ یا $x<-1 \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\cup\{0\} \quad (2)$

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} D_{gof}=\{0\}$

۶۴۹. گزینه ۳ ابتدا دامنهٔ هر کدام از توابع داده‌شده را تعیین می‌کنیم:

$D_f: 1+x^2\ne 0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$D_g: 1-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow D_g=[-1,1]$

حال با توجه به تعریف دامنهٔ تابع gof می‌توان نوشت:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1-x^2}{1+x^2}\in[-1,1]\}$$

چون $\frac{1-x^2}{1+x^2}\in[-1,1]$، پس نامعادلهٔ مضاعف $-1\le\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1$ را حل می‌کنیم:

$\xrightarrow[(1+x^2)>0]{\times(1+x^2)} -1-x^2\le 1-x^2\le 1+x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases}1-x^2\le 1+x^2 \Rightarrow 2x^2\ge 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}\\ 1-x^2\le 1-x^2 \text{ همواره برقرار است.}\end{cases}$$

$\Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}$

۶۵۰. گزینه ۳ دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌یابیم:

$g(x)=0 \Rightarrow x+|x|=0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow x\le 0$

$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-(-\infty,0]=(0,+\infty)$

حال ضابطهٔ تابع را با توجه به دامنه بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{x>0}(\frac{f}{g})(x)=\frac{2-(x+1)}{x+x}=\frac{-x+1}{2x}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}$$

با توجه به اینکه $x>0$ است، می‌توان نوشت:

$x>0 \Rightarrow \frac{1}{x}>0 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2x}>0$

$\xrightarrow{+(-\frac{1}{2})} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}>-\frac{1}{2} \Rightarrow y>-\frac{1}{2}$

برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ بازهٔ $(-\frac{1}{2},+\infty)$ است.

۶۵۱. گزینه ۳	۶۵۲. گزینه ۲	۶۵۳. گزینه ۱
۶۵۴. گزینه ۲	۶۵۵. گزینه ۲	۶۵۶. گزینه ۱
۶۵۷. گزینه ۱	۶۵۸. گزینه ۲	۶۵۹. گزینه ۲
۶۶۰. گزینه ۴		

۶۶۱. گزینه ۱ دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$\Delta=b^2-4ac=36-4\times 1\times 4=20$

$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{6\pm 2\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x_1=3+\sqrt{5}\,,\,x_2=3-\sqrt{5}$

۶۶۲. گزینه ۲ در معادلهٔ داده شده جمع ضرایب برابر صفر است: پس:

$A=(1-\sqrt{2})x^2-2x+\sqrt{2}+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0}$

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{1-2}=-(3+2\sqrt{2})\end{cases}$$

۶۶۳. گزینه ۴ مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است:

$\xrightarrow{a+b+c=0} 1-\log_{15}5-\log_{15}3=0$

$\Rightarrow 1-(\log_{15}5+\log_{15}3)=1-\log_{15}5\times 3=1-1=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=\frac{c}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۱\\ x_۲=-\log_{۱۵}۳\end{cases} \Rightarrow x_۱-x_۲$$
$$=۱-(-\log_{۱۵}۳)=\log_{۱۵}۱۵+\log_{۱۵}۳=\log_{۱۵}۴۵$$

۶۶۴. گزینه ۱ $x=\frac{۱}{۲}$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲(\frac{۱}{۲})^۳+(\frac{۱}{۲})^۲-۷(\frac{۱}{۲})+m=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}-\frac{۷}{۲}+m=۰\Rightarrow m=۳$$

یکی از ریشه‌های معادله $x=\frac{۱}{۲}$ است، پس عبارت $۲x^۳+x^۲-۷x+۳$ بر $x-\frac{۱}{۲}$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+x^۲-۷x+۳ & x-\frac{۱}{۲} \\ \hline -(۲x^۳-x^۲)+۳ & ۲x^۲+۲x-۶ \\ \quad ۲x^۲-۷x & \\ \quad -(۲x^۲-\ x) & \\ \qquad -۶x+۳ & \\ \qquad -(۶x+۳) & \\ \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

سایر ریشه‌های معادله از $۲x^۲+۲x-۶=۰$ به‌دست می‌آیند.

$$۲x^۲+۲x-۶=۰\xrightarrow{\div ۲}x^۲+x-۳=۰\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $۲x^۳+x^۲-۷x+m=۰$ برابر $\frac{-۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$ است.

۶۶۵. گزینه ۱ اگر معادلهٔ $(x+۲)^۲=k-۳$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید $k-۳=۰$ شود.
$$k=۳\Rightarrow (x-۱)^۲=۳+۱\Rightarrow (x-۱)^۲=۴$$
$$\Rightarrow x-۱=\pm ۲\Rightarrow x=۳\ ,\ x=-۱$$

۶۶۶. گزینه ۳ برای این که معادله ریشهٔ مضاعف و مثبت داشته باشد باید $\Delta=۰$ و $-\frac{b}{۲a}>۰$ باشند.
$$\Delta=۰\Rightarrow ۴k^۲-۴(k+۲)=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۴}k^۲-k-۲=۰\Rightarrow k=-۱\ ,\ k=۲$$
$$x_{\circ}=-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow -\frac{-۲k}{۲k+۴}=\frac{۲k}{۲k+۴}>۰$$
عبارت به‌ازای $k=۲$ مثبت است.
$$x_{\circ}=\frac{۲k}{k+۲}\xrightarrow{k=۲}x=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$
حاصل $kx_{\circ}$ برابر $\frac{۱}{۲}\times ۲$ است.

۶۶۷. گزینه ۱ ضابطه‌های دو تابع را با هم مساوی قرار می‌دهیم:
$$x^۲=۲x+۳\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۳\ ,\ x=-۱$$
نقاط A و B را با جای‌گذاری $x=-۱$ و $x=۳$ در یکی از تابع‌ها به‌دست می‌آوریم: $A(-۱,۱)$, $B(۳,۹)$

فاصلهٔ دو نقطه را می‌یابیم:
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$
$$=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۹-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

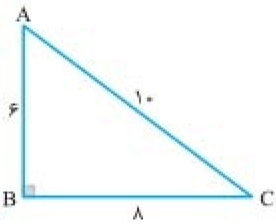
۶۶۸. گزینه ۳ اعداد فرد متوالی را $۲k-۱$ و $۲k+۱$ در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۹۵ است، پس:
$$(۲k-۱)(۲k+۱)=۱۹۵\Rightarrow ۴k^۲-۱=۱۹۵\Rightarrow k^۲=۴۹\Rightarrow k=\pm ۷$$
با فرض $k=۷$ اعداد فرد مطلوب ۱۳ و ۱۵ هستند، که مجموع آن‌ها ۲۸ است.

۶۶۹. گزینه ۴ مساحت مربع $(۲x+۱)^۲$ و مساحت مثلث $\frac{۱}{۲}(x-۱)(۳)$ است. مساحت قسمت هاشور زده، تفاضل مساحت مثلث از مربع است، یعنی:
$$۲۱۶=(۲x+۱)^۲-\frac{۳}{۲}(x-۱)\Rightarrow ۲۱۶=۴x^۲+۴x+۱-\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲۱۶=۴x^۲+\frac{۵x}{۲}+\frac{۵}{۲}$$
طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم: $۴۳۲=۸x^۲+۵x+۵$

حل معادله دشوار است و بهتر است گزینه‌ها را به جای x قرار دهیم. گزینه‌ای که حاصل جای‌گذاری آن در رابطهٔ $۸x^۲+۵x+۵$ برابر ۴۳۲ می‌شود، گزینهٔ «۴» است.

۶۷۰. گزینه ۳ بین مقادیر $x+۱$، $x+۲$ و $x+۳$ عبارت $x+۳$ بزرگ‌ترین مقدار می‌باشد، پس وتر مثلث قائم الزاویه خواهد شد. در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:
$$(x+۳)^۲=(x+۲)^۲+(x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow \cancel{x^۲}+۶x+۹=\cancel{x^۲}+\cancel{۴x}+۴+x^۲+۲x+۱$$
$$\Rightarrow ۴x^۲=۱۶\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲$$

$x=-۲$ غیرقابل قبول است: زیرا طول ضلع نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $x=۲$ خواهد شد و اضلاع مثلث عبارت‌اند از: ۵،۴،۳ ضلع کوچک مثلث، ضلع $AB=۳$ و ضلع متوسط آن $BC=۴$ و تانژانت زاویهٔ C (کوچک‌ترین زاویه) برابر است با:



$$\tan\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{۳}{۴}$$

۶۷۱. گزینه ۲ با توجه به رابطهٔ تعداد کل بازی‌های انجام شده داریم:
$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۱۰\Rightarrow n(n-۱)=۴۲۰$$
با جای‌گذاری گزینه‌ها مقدار $n=۲۱$ به دست می‌آید.

۶۷۲. گزینه ۱ روش اول عبارت را برابر A فرض می‌کنیم و طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:
$$A=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\Rightarrow A^۲=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+۲\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$
$$\Rightarrow A^۲=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+۲\Rightarrow A^۲=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}+۲$$
اگر مجموع ریشه‌های معادله را $S=-\frac{b}{a}=۵$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P=\frac{c}{a}=۲$ در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:
$$A^۲=\frac{S^۲-۲P}{P}+۲=\frac{۵^۲-۲(۲)}{۲}+۲=\frac{۲۵}{۲}$$
$$\Rightarrow A=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

روش دوم با توجه به این که ریشه‌ها مثبت هستند ($S>۰$ و $P>۰$) می‌توان رادیکال‌ها را به‌صورت جداگانه نوشت:
$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$$
مخرج مشترک می‌گیریم:
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۷۳. گزینه ۲ عبارت خواسته شده را A در نظر می‌گیریم و برای از بین بردن رادیکال‌ها، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A=\left|\alpha\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\alpha}\right|\Rightarrow A^{۲}=\alpha^{۲}\beta+\beta^{۲}\alpha-۲\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow A^{۲}=\alpha\beta(\alpha+\beta)-۲\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

به‌جای $\alpha\beta$ و $\alpha+\beta$ به‌ترتیب P و S جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A^{۲}=P\cdot S-۲P\sqrt{P}\Rightarrow A=\sqrt{P\cdot S-۲P\sqrt{P}}$$

می‌دانیم $S=-\frac{b}{a}=۲$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$ است.

$$A=\sqrt{\frac{۲}{۳}-۲(\frac{۱}{۳})\sqrt{\frac{۱}{۳}}}=\sqrt{\frac{۲}{۳}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}}$$

$$=\sqrt{\frac{۶-۲\sqrt{۳}}{۹}}=\frac{۱}{۳}\sqrt{۶-۲\sqrt{۳}}$$

۶۷۴. گزینه ۱ مجموع ریشه‌های این معادله ۵ و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن ۲- است. عبارت خواسته شده را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}+\frac{\beta-۱}{\beta+۱}=\frac{(\alpha-۱)(\beta+۱)+(\alpha+۱)(\beta-۱)}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+\cancel{\alpha}-\cancel{\beta}-۱)+(\alpha\beta-\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-۱)}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}$$

$$=\frac{۲\alpha\beta-۲}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+۱}=\frac{۲(-۲)-۲}{-۲+۵+۱}=\frac{-۶}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

۶۷۵. گزینه ۲ فرض کنید این معادله دارای دو ریشهٔ $x_{۱}$ و $x_{۲}$ است، پس دربارهٔ واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی آن‌ها داریم:

$$\text{واسطهٔ حسابی ریشه‌ها}=\frac{x_{۱}+x_{۲}}{۲}=\frac{S}{۲}=-\frac{b}{۲a}=\frac{۴m-۱}{۲}$$

$$\text{واسطهٔ هندسی ریشه‌ها}=\sqrt{x_{۱}x_{۲}}=\sqrt{P}=\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{۴m^{۲}}=۲|m|$$

اختلاف واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی برابر است با:

$$۲|m|-\frac{۴m-۱}{۲}=۱\Rightarrow ۲|m|=\frac{۴m+۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲|m|=۲m+\frac{۱}{۲}\begin{cases}m>۰\Rightarrow ۲m=۲m+\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰\neq\frac{۱}{۲}\ \text{ناممکن}\\ m<۰\Rightarrow -۲m=۲m+\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=-\frac{۱}{۸}\end{cases}$$

البته باید دقت شود که به‌ازای $m=-\frac{۱}{۸}$ باید معادله دو ریشه داشته باشد.

$$x^{۲}-(-\frac{۱}{۲}-۱)x+۴(-\frac{۱}{۸})^{۲}=x^{۲}+\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۱۶}=۰$$

$$\Rightarrow\Delta=\frac{۲۵}{۴}-۴(\frac{۱}{۱۶})=۶>۰\Rightarrow$$ $m=-\frac{۱}{۸}$ تنها جواب قابل قبول

۶۷۶. گزینه ۳ رابطهٔ خواسته شده یک رابطهٔ نامتقارن است. از جای‌گذاری ریشه‌ها در معادله استفاده می‌کنیم:

$$x^{۲}-۳x+۱=۰\xrightarrow{x=x_{۲}}x_{۲}^{۲}-۳x_{۲}+۱=۰\Rightarrow x_{۲}^{۲}=۳x_{۲}-۱$$

در رابطه، به جای $۳x_{۲}-۱$ مقدار $x_{۲}^{۲}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{x_{۱}^{۲}(۳x_{۲}-۱)}=\sqrt{x_{۱}^{۲}x_{۲}^{۲}}=|x_{۱}x_{۲}|=\left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{۱}{۱}\right|=۱$$

۶۷۷. گزینه ۱

$$P=(\alpha^{۲}+۵\alpha+۴)(\alpha-۳)$$

می‌دانیم $\alpha^{۲}+۴\alpha-۳=۰$، بنابراین: $\alpha^{۲}=-۴\alpha+۳$

$$P=((-۴\alpha+۳)+۵\alpha+۴)(\alpha-۳)=(\alpha+۷)(\alpha-۳)=\alpha^{۲}+۴\alpha-۲۱$$

مجدداً مقدار $\alpha^{۲}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P=(-۴\alpha+۳)+۴\alpha-۲۱=-۱۸$$

۶۷۸. گزینه ۱ اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=۶$$

S و P را به‌دست می‌آوریم و در معادله جای‌گذاری می‌نماییم:

$$\begin{cases}S=-\frac{b}{a}=\frac{m+۳}{m}\\ P=\frac{c}{a}=\frac{۵}{m}\end{cases}$$

$$S^{۲}-۲P=۶\Rightarrow(\frac{m+۳}{m})^{۲}-۲(\frac{۵}{m})=۶$$

$$\Rightarrow\frac{m^{۲}+۶m+۹}{m^{۲}}-\frac{۱۰}{m}=۶\xrightarrow{\times m^{۲}}m^{۲}+۴m-۹=۰$$

$$\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}\begin{cases}m=۱\\ m=-\frac{۹}{۵}\end{cases}$$

باید ببینیم از مقادیر $m=۱$ و $m=-\frac{۹}{۵}$ کدام‌یک دلتای معادلهٔ اصلی را نامنفی می‌کند (تا بگوییم ریشه‌ها حقیقی‌اند.)

$$\begin{cases}m=۱\Rightarrow x^{۲}-۴x+۵=۰\Rightarrow\Delta<۰ & \times\\ m=-\frac{۹}{۵}\Rightarrow\Delta>۰ & \checkmark\end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها نیز می‌توان گفت وقتی $m=۱$ رد می‌شود، بدون امتحان نمودن، $m=-\frac{۹}{۵}$ را قبول می‌کنیم.

۶۷۹. گزینه ۲ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$S=(۳+\sqrt{a+۱})+(۳-\sqrt{a+۱})=۶$$

$$P=(۳+\sqrt{a+۱})(۳-\sqrt{a+۱})=۹-a-۱=۸-a$$

معادلهٔ $x^{۲}-Sx+P=۰$ را می‌نویسیم:

$$x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}-۶x+۸-a=۰$$

۶۸۰. گزینه ۲ کافی است S' (مجموع ریشه‌های معادلهٔ جدید) را بیابیم:

$$S'=\alpha^{۲}\beta+\beta^{۲}\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=PS\quad(۱)$$

با توجه به (۱) داریم: $S=\frac{۳}{۲},P=-\frac{۱}{۲}$

$$S'=-\frac{۳}{۴}$$

با توجه به معادلهٔ $۸x^{۲}+kx-۱=۰$: $S'=-\frac{k}{۸}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow k=۶$

۶۸۱. گزینه ۴ در این معادله تفاضل دو ریشه برابر ۲ است.

$$\text{تفاضل دو ریشه}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{m^{۲}-۴۸}}{|۲|}=۲\Rightarrow\sqrt{m^{۲}-۴۸}=۴$$

$$\Rightarrow m^{۲}-۴۸=۱۶\Rightarrow m^{۲}=۶۴\Rightarrow m=\pm۸$$

۶۸۲. گزینه ۳ ریشه‌های معادله α و $۲\alpha+۳$ هستند.

$$S=\alpha+(۲\alpha+۳)=-\frac{b}{a}=-\frac{-(m+۱)}{۱}=m+۱$$

$$\Rightarrow ۳\alpha+۳=m+۱\Rightarrow\alpha=\frac{m-۲}{۳}$$

در معادله به‌جای x مقدار $\frac{m-۲}{۳}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^{۲}-(m+۱)x+m-۳=۰$$

$$\Rightarrow(\frac{m-۲}{۳})^{۲}-(m+۱)(\frac{m-۲}{۳})+m-۳=۰$$

$$\Rightarrow\frac{(m-۲)^{۲}}{۹}-\frac{(m+۱)(m-۲)}{۳}+m-۲=۰$$

$$\Rightarrow\frac{m^{۲}-۴m+۴-۳(m^{۲}-m-۲)+۹m-۱۸}{۹}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{-۲m^{۲}+۸m-۸}{۹}=۰\Rightarrow ۲m^{۲}-۸m+۸=۰$$

$$\Rightarrow m^{۲}-۴m+۴=۰\Rightarrow(m-۲)^{۲}=۰\Rightarrow m=۲$$

۶۸۳. گزینه ۴ ریشه‌های این معادله را α و β در نظر می‌گیریم:

$$2x^2-3x-1=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}\\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

ریشه‌های معادله‌ای که از معکوس ریشه‌های معادلهٔ اولیه یک واحد کمتر است، برابر است با: $\{\frac{1}{\alpha}-1,\frac{1}{\beta}-1\}$

S و P این معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$S=(\frac{1}{\alpha}-1)+(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2=-5$$

$$P=(\frac{1}{\alpha}-1)(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta}-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})+1=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-(-3)+1=2$$

به کمک رابطهٔ $x^2-Sx+P=0$ معادله مورد نظر را می‌یابیم:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2+5x+2=0$$

۶۸۴. گزینه ۳ **روش اول** معادله داده شده را مرتب می‌کنیم:

$$x(5x+3)=2\Rightarrow 5x^2+3x=2\Rightarrow 5x^2+3x-2=0 \quad (1)$$

چون رابطهٔ $a+c=b$ برقرار است، بنابراین یک ریشه (-1) و ریشهٔ دیگر $(-\frac{c}{a})$ است:

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-(-\frac{2}{5})=\frac{2}{5}\end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$، $\{1,\frac{25}{4}\}$ هستند و چون در معادله صدق می‌کنند، k به‌راحتی به دست می‌آید:

$$x_1=1\Rightarrow 4(1)^2-k+25=0\Rightarrow k=29$$

روش دوم رابطهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ جدید (y) و قدیم (x) به صورت $y=\frac{1}{x^2}$ است، بنابراین: $x^2=\frac{1}{y}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{y}}$

با جای‌گذاری در معادلهٔ قدیم (1) داریم:

$$5(\pm\frac{1}{\sqrt{y}})^2+3(\pm\frac{1}{\sqrt{y}})-2=0\Rightarrow\frac{5}{y}-2=\pm\frac{3}{\sqrt{y}}$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲ می‌رسانیم}}\frac{25}{y^2}+4-\frac{20}{y}=\frac{9}{y}\Rightarrow 4-\frac{29}{y}+\frac{25}{y^2}=0$$

$$\xrightarrow{\times y^2}4y^2-29y+25=0\Rightarrow 4x^2-29x+25=0\Rightarrow k=29$$

۶۸۵. گزینه ۳ به کمک رابطهٔ بین ریشه‌ها داریم:

$$2x^2-3x-4=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-2\end{cases}$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر را با x_1 و x_2 نشان دهیم، داریم:

$$x_1=\frac{1}{\alpha}+1\ ,\ x_2=\frac{1}{\beta}+1$$

S و P معادلهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم:

$$S=x_1+x_2=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$P=x_1x_2=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1$$

به جای $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ مقادیر آن‌ها را جای‌گذاری می‌نماییم:

$$S=x_1+x_2=\frac{\frac{3}{2}}{-2}+2=\frac{5}{4}$$

$$P=x_1x_2=\frac{1}{-2}+\frac{\frac{3}{2}}{-2}+1=-\frac{1}{4}$$

اگر معادلهٔ جدید را به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ در نظر بگیریم، داریم:

$$x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0\xrightarrow{\times 4}4x^2-5x-1=0$$

۶۸۶. گزینه ۴

$$2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0\Rightarrow S=\frac{m+1}{2}\ ,\ P=\frac{1}{16}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\xrightarrow{\text{توان۲}}\underbrace{\alpha+\beta}_{S}+2\sqrt{\underbrace{\alpha\beta}_{P}}=4\Rightarrow S+2\sqrt{P}=4$$

$$\Rightarrow\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}=4\Rightarrow\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4$$

$$\Rightarrow m+2=8\Rightarrow m=6$$

۶۸۷. گزینه ۳

$$2x^2-x-2=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{1}{2}\\ P=\alpha\beta=-1\end{cases}$$

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=(\frac{1}{2})^3-3(-1)(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}=\frac{13}{8}$$

از طرفی می‌دانیم: $\alpha^3+\beta^3=\frac{m}{8}$

پس: $\frac{m}{8}=\frac{13}{8}\Rightarrow m=13$

۶۸۸. گزینه ۱ مطابق آن‌چه در درس‌نامه گفته شد برای این‌که معادلهٔ دو مجذوری فوق، ۴ ریشه داشته باشد، باید:

$$\Delta>0\Rightarrow(-4)^2-4(m)(m-3)>0\Rightarrow -4m^2+12m+16>0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)}m^2-3m-4<0\Rightarrow -1<m<4$$

$$S>0\Rightarrow\frac{-b}{a}>0\Rightarrow -\frac{-4}{m}>0\Rightarrow m>0$$

$$P>0\Rightarrow\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{m-3}{m}>0\Rightarrow m<0 \text{ یا } m>3$$

با اشتراک جواب‌های فوق به $3<m<4$ می‌رسیم، در نتیجه $a=3$ و $b=4$، در نتیجه $b-a=1$ می‌شود.

۶۸۹. گزینه ۲ با توجه به این‌که $x^2=|x|^2$ است می‌توان معادله را به‌صورت زیر نوشت: $(x\neq 0)$

$$2x^2-\frac{x^2}{|x|}+k=0\Rightarrow 2|x|^2-\frac{|x|^2}{|x|}+k=0$$

$$\Rightarrow 2|x|^2-|x|+k=0$$

برای این‌که معادله ۴ ریشه داشته باشد باید $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$ باشند.

$$\Delta>0\Rightarrow(-1)^2-4(2)(k)>0\Rightarrow 1-8k>0\Rightarrow k<\frac{1}{8}$$

$$S>0\Rightarrow -\frac{b}{a}>0\Rightarrow -\frac{-1}{2}>0\Rightarrow\frac{1}{2}>0$$ همواره برقرار است.

$$P>0\Rightarrow\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{k}{2}>0\Rightarrow k>0$$

اشتراک مجموعه جواب‌ها $0<k<\frac{1}{8}$ است.